www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE **SESSION 1989**

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les questions 1, 2 et 3 de la partie III peuvent être traitées de façon indépendante.

»»»»»»»»»»»o«««««««««««

I. Soit la fonction g : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{e^t - 1} \end{array}$ telle que $g(0) = 1$.

On admet l'existence d'une série entière, de rayon de convergence R, telle que :

(1) $\forall t \in \mathbb{C}$, $|t| < R \implies g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$.

On définit ainsi une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$.

De même, pour tout x de $\mathbb{R}$, on admet l'existence d'une série entière, de rayon de convergence $R_1(x)$, telle que :

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{C}$, $|t| < R_1(x) \implies g(t)e^{tx} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$.

On définit ainsi une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynômes réelles.

1°) Montrer que $R \leqslant 2\pi$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $R_1(x) \leqslant 2\pi$.

Dans la suite on admettra : $R = 2\pi$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $R_1(x) = 2\pi$.

2°) Montrer que, $\forall p \geqslant 1$, $b_{2p+1} = 0$. On pourra calculer la partie impaire de g .

Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\sum_{p=0}^{n-1} C_n^p b_p = 0$, avec $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Calculer b_p pour $p \leqslant 8$.

3°) Montrer que $B_n(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p b_p x^{n-p}$ et préciser la valeur de $B_0(x)$.

$\forall n \geqslant 2$, comparer $B_n(0)$ et $B_n(1)$; $\forall n \geqslant 1$, trouver une relation entre $B_{n-1}(x)$ et $B'_n(x)$, dérivée de $B_n(x)$ par rapport à x.

Expliciter $B_n(x)$ pour $n \leqslant 4$.

II. Pour n élément de $\mathbb{N}$, on désigne par $\overline{B}_n$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, périodique , de période 1, telle que les restrictions de $\overline{B}_n$ et B_n à $[0,1[$ sont égales.

TSVP

1°) Etudier la parité de $\bar{B}_n$ suivant la parité de n.

On raisonnera par récurrence sur n.

2°) Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, périodique de période T, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier est :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n(f)\cos n\omega x + b_n(f)\sin n\omega x), \text{ ou encore } \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{ni\omega x}.$$

On sait que : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $a_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$,

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos n\omega x\,dx$, et $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin n\omega x\,dx$,

Pour $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-ni\omega x}dx$.

Donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - i\,b_n(f))$ et $c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + i\,b_n(f))$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}$, trouver une relation entre $a_n(\bar{B}_{k+1})$ et $b_n(\bar{B}_k)$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $b_n(\bar{B}_{k+1})$ et $a_n(\bar{B}_k)$.

(On intégrera par parties et on utilisera les résultats trouvés à la question I-3).

3°) Calculer $a_0(\bar{B}_{2p})$ et $b_n(\bar{B}_1)$.

En utilisant les résultats de II-2, calculer $b_n(\bar{B}_{2p+1})$ et $a_n(\bar{B}_{2p})$ en fonction de n et de p, pour $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$.

Justifier la convergence des développements en série de Fourier, sur [0,1] des fonctions $\bar{B}_{2p}$ et $\bar{B}_{2p+1}$ pour $p \geqslant 1$ et de la fonction $\bar{B}_1$ sur]0,1[. Exprimer ces développements.

4°) Soit $\varphi(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k\in\mathbb{N}^*$; donner une relation entre $\varphi(2k)$ et b_{2k}.

Calculer $\varphi(2k)$ pour $0 < k \leqslant 4$ sous la forme $\varphi(2k) = \alpha_k\pi^{2k}$, $\alpha_k\in\mathbb{Q}$.

III. Dans l'ensemble E des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$, périodiques et de période T, on définit le produit de convolution noté $\star$ par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \forall (f,g)\in E^2,\quad (f\star g)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-u)g(u)du.$$

TSVP

1°) Montrer que ce produit définit une loi interne pour E.

2°) Montrer que ce produit est commutatif et associatif.

3°) Etudier la parité de $f \star g$ selon les parités éventuelles de f et de g.

4°) On reprend les notations de la question II-2, concernant les coefficients de Fourier d'une fonction.

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, (f,g) \in E^2$, $c_n(f \star g) = c_n(f).c_n(g)$.

En déduire les expressions de $a_n(f \star g)$ et $b_n(f \star g)$ en fonction de

$a_n(f)$, $a_n(g)$, $b_n(f)$, $b_n(g)$, pour $n \geqslant 1$.

5°) En admettant que la suite (c_n), $n \in \mathbb{N}$, des coefficients complexes de la série de Fourier d'une fonction f continue, périodique, tend vers zéro quand $n \to +\infty$, montrer que l'ensemble E ne peut pas posséder d'élément neutre pour la loi $\star$.

6°) La fonction $\overline{B}_2$ est liée à la fonction B_2 trouvée au I-3 par la définition du début de la partie II.

Calculer $[\overline{B}_2 \star \overline{B}_2](t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

On montrera qu'on peut se restreindre à $t \in [0,1]$; On écrira alors $[0,1] = [0,t] \cup [t,1]$

On exprimera le résultat en fonction de $\overline{B}_4(t)$

7°) Dans ce qui suit, n est élément de $\mathbb{Z}$:

Calculer $c_n(\overline{B}_0)$ pour $n = 0$ et pour $n \neq 0$.

Calculer $c_n(\overline{B}_1)$ pour $n = 0$ et pour $n \neq 0$.

Pour $k \geqslant 2$, trouver une relation entre $c_n(\overline{B}_k)$ et $c_n(\overline{B}_{k-1})$

et en déduire $c_n(\overline{B}_k)$ pour $n = 0$ et pour $n \neq 0$

Trouver une relation entre $\overline{B}_k \star \overline{B}_p$ et $\overline{B}_{k+p}$, $k \geqslant 2$, $p \geqslant 2$.

»»»»»»»»»»o«««««««««««

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail